Équivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz

Gourdon, p. 50, 56

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\forall x \in E$, $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Posons $N_0(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, qui définit une norme sur E. Soit N une norme sur E. Montrons que N est équivalente à N_0.

① Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Alors : $N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right)}_{=: a > 0} N_0(x)$

② Considérons $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

L'application $\varphi : \begin{array}{l} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, N_0) \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array}$ est une isométrie linéaire. Ainsi, φ est continue.

Posons $S = \{x \in E ; N_0(x) = 1\}$. Alors $S = \varphi(S^{n-1})$ où $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n ; \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = 1\}$ est un compact de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ car fermé borné.

Par continuité de φ, S est un compact de (E, N_0).

D'après ①, $N : (E, N_0) \to \mathbb{R}$ est continue car $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a N_0(x-y)$.

D'où, $\exists x_0 \in S$ tel que $N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x)$. Nécessairement, $\underbrace{N(x_0)}_{=: b} > 0$ car sinon $x_0 = 0 \notin S$.

Ainsi, $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) = N_0(x) N\Big(\underbrace{\frac{x}{N_0(x)}}_{\in S}\Big) \geq b N_0(x)$.

$\Longrightarrow b N_0 \leq N \leq a N_0$.

Théorème (Riesz) : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie ssi $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

$\Longrightarrow$: Puisque E est de dimension finie, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. De plus, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est homéomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ dont les compacts sont les fermés bornés. D'où $\overline{B}_{(E, \|\cdot\|_\infty)}(0,1)$ est compacte et par équivalence des normes, $\overline{B}_{(E, \|\cdot\|)}(0,1)$ est compacte.

si $x \in B$ et $\|x_{\varphi(n)} - x\|_\infty \longrightarrow 0$,
alors $\|x_{\varphi(n)} - x\| \leq \alpha \|x_{\varphi(n)} - x\|_\infty \longrightarrow 0$

$\Longleftarrow$: Supposons E de dimension infinie et, par l'absurde, supposons $\overline{B(0,1)}$ compacte. Puisque $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{x \in \overline{B(0,1)}} B(x,1)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \overline{B(0,1)}$ tels que $\overline{B(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Puisque E est de dimension infinie, $\exists x \in E \setminus F$.

Puisque F est de dimension finie, $\exists y \in F$ tel que $d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| = \|x - y\|$.

En effet, l'application $f : z \mapsto \|x - z\|$ est continue coercive. Donc, pour $a \in F$ fixé, $\Gamma = \{z \in F ; f(z) \leq f(a)\} = f^{-1}(]-\infty, f(a)])$ est un fermé borné de F.

Donc Γ est compact car F est de dimension finie. D'où $\exists y \in \Gamma$ tel que $f(y) = \inf_{z \in \Gamma} f(z)$ et par construction de Γ, $\inf_{z \in F} f(z) = \inf_{z \in \Gamma} f(z)$.

Posons $x_0 = \frac{x - y}{\|x - y\|}$. Puisque $\|x_0\| = 1$, $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_0 \in B(x_i, 1)$.

D'où, $d(x_0, F) \leq \|x_0 - x_i\| < 1$ car $x_i \in F$.

Or, $\forall z \in F$, $\|x_0 - z\| = \left\|\frac{x-y}{\|x-y\|} - z\right\| = \frac{1}{\|x-y\|} \Big\| x - \overbrace{(\underbrace{y}_{\in F} + \|x-y\| \underbrace{z}_{\in F})}^{\in F} \Big\| \geq \frac{d(x,F)}{\|x-y\|} = 1$ car $d(x,F) = \|x-y\|$.

$\Rightarrow$ Donc $1 \leq d(x_0, F) < 1 \Rightarrow \Leftarrow$

D'où $\overline{B(0,1)}$ n'est pas compacte.